SEMICONTINUITÀ

X METRICO, $F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ È SEMICONTINUO INFER. (S.C.I)

(RISP. SEMICONT. SUPER., S.C.S.)

se $\forall x_n \to x$ $\quad F(x) \leq \liminf_n F(x_n)$.

$\left(\text{RISP. } F(x) \geq \limsup_n F(x_n) \right)$

OSS: F s.c.i. $\iff \{F \leq c\}$ CHIUSO

OSS: F_i s.c.i. $\implies \sup_{i \in I} F_i$ è s.c.i.

OSS: F CONT. $\iff F$ S.C.I. E S.C.S.

TEO (WEIERSTRASS) $E \subseteq X$ COMPATTO, F s.c.i. $\Longrightarrow \exists \min_E F$

TEO $\mathcal{L}(u) = \int_I L(x,u,u') : W^{1,p} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $1 \leq p < +\infty$,

L DI CARATH., $L \geq c$ CON $c \in \mathbb{R}$,

$\boxed{L \text{ È S.C.I. PER LA CONV. DEBOLE} \iff z \to L(x,y,z) \text{ CONVESSA } \tilde{\forall} x \in \forall y}$

DIM (TRACCIA) SUPP. $L = L(z)$, COL L CONT. E $L \geq c$.

OSSERVIAMO CHE $u_n \xrightarrow[W^{1,p}]{} u$, $u_n(x) \to u(x)$ E $u_n'(x) \to u'(x)$ $\tilde{\forall} x$,

$$\mathcal{L}(u) = \int_I \liminf_n L(u_n) \underset{\uparrow \text{ FATOU}}{\leq} \liminf_n \int L(u_n) = \liminf_n \mathcal{L}(u_n).$$

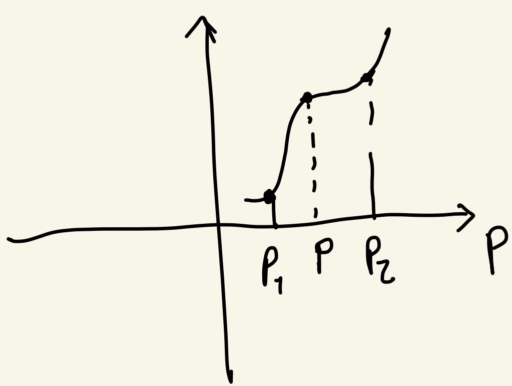
IN PART. $\{\mathcal{L} \leq M\}$ È CHIUSO IN $W^{1,p}$.

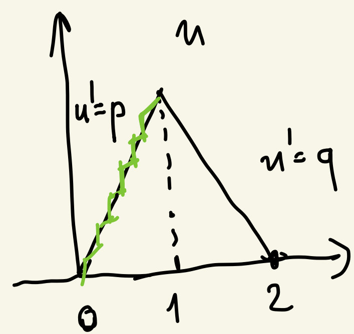
·) L CONVESSA $\Rightarrow \{\mathcal{L} \leq M\}$ È CONV. CHIUSO $\Rightarrow$ DEB. CHIUSO $\Rightarrow$

L S.C.I. PER LA CONV. DEBOLE.

·) SUPP. L S.C.I. MA NON SIA CONVESSA, CIOÈ $\exists$ $p = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$ T.C.

$$L(p) > \frac{L(p_1) + L(p_2)}{2}.$$





$$u_n^1 = \begin{cases} p_1 & x \in \left[\frac{2k}{n}, \frac{2k+1}{n}\right) \\ p_2 & x \in \left[\frac{2k+1}{n}, \frac{2k+2}{n}\right) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(u) = L(p) + L(q) > \mathcal{L}(u_n) = \frac{1}{2}\Big(L(p_1) + L(p_2)\Big) + L(q)$$

ASSURDO.

RILASSAMENTO

X METRICO $\quad F: X \to \overline{\mathbb{R}}$

DEF: $\overline{F}: X \to \overline{\mathbb{R}}$ T.C. $\overline{F}(x) = \inf_{x_n \to x} \liminf_n F(x_n)$

SI DICE RILASSATO DI F.

PROP. $\overline{F}$ È S.C.I. E $\overline{F} = \max \{ G \leq F : G \text{ s.c.i.} \}$

DIM

SIA $x \in X$, $\varepsilon > 0$

E SIA x_n T.C. $\liminf_n F(x_n) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon$

$\forall G \leq F$ s.c.i. $\quad G(x) \leq \liminf_n G(x_n) \leq \liminf_n F(x_n) \leq \overline{F}(x) + \varepsilon$

$\Rightarrow G \leq \overline{F}$

DEVO MOSTRARE CHE $\overline{F}$ È S.C.I:

$x_n \to x$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{x}_n$ T.C. $d_X(x_n, \tilde{x}_n) \leq \frac{1}{2^n}$ E $F(\tilde{x}_n) \leq \overline{F}(x_n) + \varepsilon$.

$\tilde{x}_n \to x$ $\quad \overline{F}(x) \leq \liminf_n F(\tilde{x}_n) \leq \liminf_n \overline{F}(x_n) + \varepsilon$.

TEO $\quad \mathcal{L}(u) = \int L(x,u,u')$ $\quad$ L DI CARATH., $\quad L \geq C$

$\Rightarrow \overline{\mathcal{L}}(u) = \int L^{**}(x,u,u')$ $\quad$ DOVE

L^{**} È IL CONVESSIFICATO DI L NELLA VAR. z, CIOÈ

$\tilde{\forall} x$ E $\forall y$ $\quad L^{**}(x,y,z) = \max \{ G(z) :$ G CONVESSA E $G(\cdot) \leq L(x,y,\cdot) \}$

OSS: $L^{**} \leq L$ E $= \iff z \to L(x,y,z)$ CONVESSA

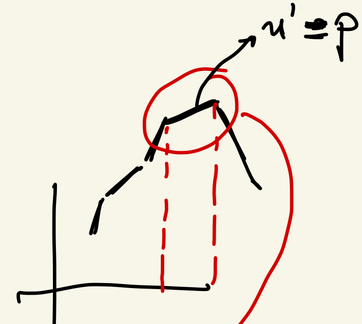
DIM (TRACCIA) SIA $L = L(z)$ CONTINUA, $L \ge C$.

(1) $\tilde{\mathcal{L}} = \int L^{**}(u) \le \mathcal{L}$ E $\tilde{\mathcal{L}}$ È S.C.I. $\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} \le \bar{\mathcal{L}}$.

(2) DATA $u \in W^{1,p}$ $\exists\, u_n \in W^{1,p}$ T.C. $u_n \to u$ E

$$\mathcal{L}(u_n) = \int L(u_n') \to \int L^{**}(u') = \tilde{\mathcal{L}}(u)$$

$$\bar{\mathcal{L}}(u_n) \le \lim_n \mathcal{L}(u_n) = \tilde{\mathcal{L}}(u).$$

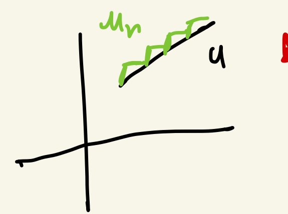


VEDIAMO COME SI COSTRUISCE u_n

·) POSSO SUPP. u LINEARE A TRATTI

·) " " u LINEARE, $u' = p$

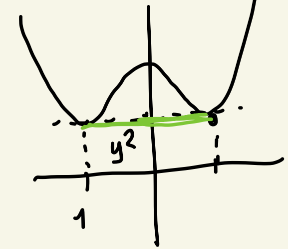
·) $L^{**}(p) = \lambda L(p_1) + (1-\lambda) L(p_2)$



$u_n' \in \{p_1, p_2\}$

ES: (BOLZA) $\mathcal{L}(u) = \int (1-u'^2)^2 + u^2$

$z \to L(y,z)$



$$\overline{\mathcal{L}}(u) = \int_I L^{**}(u) = \int_I f(u') + u^2$$

$$f(z) = \begin{cases} (1-z^2)^2 & |z| > 1 \\ 0 & |z| \leq 1 \end{cases}$$

ES: (DOPPIO POZZO) $\mathcal{L}(u) = \int u'^2 + (1-u^2)^2$

$L = L^{**}$ $\qquad \mathcal{L} = \widetilde{\mathcal{L}}$